

Πρόταση Έστω $(a_m) \subseteq \mathbb{R}$ αυθ. δια διατινών τότε
 $\exists \lim a_m = b_m \in \mathbb{R}$ ορισμοί ως προς m . Αν $\forall n \in \mathbb{N} \exists \lim_m a_{nm} = c_n \in \mathbb{R}$
 τότε (υπάρχουν τα όρια των b_m, c_n) $\lim_n c_n = \lim_m b_m$.

Πρόταση Έστω $(a_{nm}) \subseteq \mathbb{R}$ και έστω ότι $\forall n, m \in \mathbb{N} \quad a_{nm} \leq a_{n+m, m}$ και $a_{nm} \leq a_{n, m+n}$ (1) (2)
 τότε $\lim_n \lim_m a_{nm} = \lim_m \lim_n a_{nm}$.

Απόδειξη $a_{nm} \leq a_{n+m, m} \Rightarrow (a_{nm})_{n \in \mathbb{N}} : \alpha \uparrow \text{ αυξουσα}$ $a_{nm} \leq a_{n, m+n} \Rightarrow (a_{nm})_{m \in \mathbb{N}} : \alpha \uparrow \text{ αυξουσα}$
 $\Rightarrow \lim_n a_{nm} = b_m$ (υπάρχει στο $\mathbb{R}^*$) και $\lim_m a_{nm} = c_n$ (υπάρχει στο $\mathbb{R}^*$)
 (1)(2) $\Rightarrow \lim_n a_{nm} \leq \lim_n a_{n+m, m} \Rightarrow b_m \leq b_{m+1} \Rightarrow (b_m)_{m \in \mathbb{N}} : \alpha \uparrow \text{ αυξουσα} \Rightarrow \exists \lim_m b_m = b \in \mathbb{R}^*$
 και $\lim_m a_{nm} \leq \lim_m a_{n, m+n} \Rightarrow c_n \leq c_{n+1} \Rightarrow (c_n)_{n \in \mathbb{N}} : \alpha \uparrow \text{ αυξουσα} \Rightarrow \exists \lim_n c_n = c \in \mathbb{R}^*$
 $\forall n, m \in \mathbb{N} \quad a_{nm} \leq \sup \{a_{nm} : n \in \mathbb{N}\} = \lim_n a_{nm} = b_m \leq \sup \{b_m : m \in \mathbb{N}\} = \lim_m b_m = b$
 άρα $\forall n, m \in \mathbb{N} \quad a_{nm} \leq b \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \lim_m a_{nm} \leq b \Rightarrow c = \lim_n c_n \leq b \Rightarrow c \leq b$
 όμοια $b \leq c$, άρα $b = c$.

Άσκηση Έστω $(a_{nm}) \subseteq \mathbb{R}$ με τιμή $a_{nm} = 1 - \frac{1}{m}$. Να εξετάσετε αν
 ικανοποιούν οι προϋποθέσεις της προηγούμενης πρότασης.

Άσκηση Όμοια για την $a_{nm} = (1 - \frac{1}{m})^n, n \in \mathbb{N}, m \geq 1$

Λύση $\lim_m a_{nm} = \lim_m (1 - \frac{1}{m})^n = 1$ $\lim_n a_{nm} = \lim_n (1 - \frac{1}{m})^n = 0$
 άρα δεν ικανοποιούν και οι δύο προϋποθέσεις.
 $m < m+1 \Rightarrow \frac{1}{m} > \frac{1}{m+1} \Rightarrow -\frac{1}{m} < -\frac{1}{m+1} \Rightarrow 1 - \frac{1}{m} < 1 - \frac{1}{m+1} \Rightarrow (1 - \frac{1}{m})^n < (1 - \frac{1}{m+1})^n \Rightarrow a_{nm} < a_{n, m+1}$
 όπως $a < 1 \Rightarrow a^{m+1} < a^m$ άρα a_{nm} όχι αυξουσα ως προς n

για το υπόλοιπο $\lim_n a_{nm} = 0$ αλλά η αύξουσα δεν είναι αυστηρή,
 ως προς m διότι έστω $\epsilon > 0$ τότε $|a_{nm} - 0| < \epsilon \Rightarrow N(n, m) = \left\lceil \frac{\log \epsilon}{\log(1 - \frac{1}{m})} \right\rceil + 1$
 Η $\log(1 - \frac{1}{m}) < 0$, $x > 1$ είναι αυξουσα και $\sup \{f(x) : x > 1\} = +\infty \Rightarrow \sup_{m \in \mathbb{N}} N(n, m) = +\infty$

②

Πρόταση Έστω $p_0: \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \times \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$. $p_0(f, g) = \min\{1, \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|\}$
 Τότε p_0 μετρική στο $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$.

- Απόδειξη
- i) $\forall f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ $p_0(f, g) \geq 0$ (ημερώνες)
 - ii) $p_0(f, g) = 0 \Leftrightarrow \min\{1, \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|\} = 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)| = 0 \Leftrightarrow \forall x \in A, f(x) = g(x) \Leftrightarrow f = g$
 - iii) $p_0(f, g) = p_0(g, f)$ (ημερώνες)
 - iv) $\forall f, g, h \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \quad \forall x \in A \quad |f(x) - g(x)| = |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$
 $\leq \sup_{x \in A} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in A} |h(x) - g(x)| \Rightarrow \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)| \leq \underbrace{\sup_{x \in A} |f(x) - h(x)|}_a + \underbrace{\sup_{x \in A} |h(x) - g(x)|}_b$
 $a, b, \gamma \geq 0$ και $a \leq b + \gamma \Rightarrow \min\{1, a\} \leq \min\{1, b\} + \min\{1, \gamma\}$
 $\Rightarrow p_0(f, g) \leq p_0(f, h) + p_0(h, g)$

Πρόταση Έστω $(f_n) \subseteq \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ και $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$. Τότε $f_n \rightarrow f \Leftrightarrow p_0(f_n, f) \rightarrow 0$

Απόδειξη ($\Rightarrow$) Έστω $0 < \varepsilon < 1$. Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon < 1, \forall x \in A$
 $\Rightarrow \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon < 1 \Rightarrow \min\{1, \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|\} = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon < 1$
 $\Rightarrow p_0(f_n, f) < \varepsilon$ Άρα $(\forall \varepsilon > 0 \text{ με } \varepsilon < 1) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) n \geq n_0 \Rightarrow p_0(f_n, f) < \varepsilon$
 άρα $p_0(f_n, f) \rightarrow 0$.

($\Leftarrow$) Έστω $0 < \varepsilon < 1$. Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}: n \geq n_0 \Rightarrow |p_0(f_n, f) - 0| < \varepsilon \Rightarrow p_0(f_n, f) < \varepsilon < 1$
 $\Rightarrow \min\{1, \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|\} < \varepsilon < 1 \Rightarrow \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
 $\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in A$ για $n \geq n_0 \Rightarrow f_n \rightarrow f$

Άσκηση Έστω $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$, $x \in (0,1)$. Να εξεταστεί ως προς την ομοιότητα σύγκλισης.

Λύση $f_n \xrightarrow{k.e} f$ όπου $f(x) = 0$, $x \in (0,1)$

$$p(f_n, f) = \min\{1, \sup_{x \in (0,1)} |\frac{x^n}{1+x^n}|\} = \frac{1}{2} \neq 0 \text{ άρα } f_n \not\rightarrow f$$

Θεώρημα $(X(A, \mathbb{R}), p_U)$: πλήρης

Απόδειξη Έστω $(f_n) \subseteq X(A, \mathbb{R})$ βασική ακολουθία.
 Τότε $(\forall \varepsilon > 0 \text{ με } \varepsilon < 1) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) n, m \geq n_0 \Rightarrow p(f_n, f_m) < \varepsilon$
 $\Rightarrow \min\{1, \sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)|\} < \varepsilon < 1 \Rightarrow \forall x \in A |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ (*)
 $\Rightarrow (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$: βασική στο $\mathbb{R}$, $\forall x \in A \Rightarrow$ συγκλινούσα
 Έστω $\lim_n f_n(x) = f(x)$. Έτσι ορίζεται $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_n f_n(x)$ (από $f_n \xrightarrow{k.e} f$)
 $(\forall m \geq n_0) |f_m(x) - f(x)| = \lim_n |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow \sup_{x \in A} |f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon < 1$
 $\Rightarrow \min\{1, \sup_{x \in A} |f_m(x) - f(x)|\} \leq \varepsilon \Rightarrow p(f_m, f) \leq \varepsilon \Rightarrow p(f_m, f) \rightarrow 0 \Rightarrow f_m \rightarrow f$

Άσκηση Έστω $(f_n) \subseteq X(A, \mathbb{R})$, $f \in X(A, \mathbb{R})$ όπου $|A| < \infty$. Να $f_n \xrightarrow{k.e} f \Rightarrow f_n \rightarrow f$.

Λύση Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\{N_\varepsilon(x) : x \in A\} \neq \emptyset$. Έστω $A = \{x_1, \dots, x_m\}$
 $K = \max\{N_\varepsilon(x_i) : i=1, \dots, m\}$ τότε $\forall x \in A N_\varepsilon(x_i) \leq K < \infty \Rightarrow f_n \rightarrow f$.

Φραγμένες Συναρτήσεις

Ορισμός Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η f είναι φραγμένη στο A αν $\exists M > 0 : \forall x \in A |f(x)| \leq M$.
 $B(A, \mathbb{R}) := \{f: A \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ φραγμένη}\}$

(4)

Πρόταση $(B(A, \mathbb{R}), \rho_0)$: πλήρης

Απόδειξη Αρκεί να είναι ικανοποιημένος ο ορισμός του $f(A, \mathbb{R})$.

Έστω $(f_n) \subseteq B(A, \mathbb{R})$ και $f \in F(A, \mathbb{R})$ ώστε $f_n \xrightarrow{\rho_0} f$.

Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow \rho_0(f_n, f) < \frac{1}{2} \Rightarrow \min \{1, \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|\} < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow |f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{1}{2}, \forall x \in A$

$f_{n_0} \in B(A, \mathbb{R}) \Rightarrow \exists M > 0 : |f_{n_0}(x)| \leq M, x \in A$

$|f(x)| = |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x)| \leq |f_{n_0}(x) - f(x)| + |f_{n_0}(x)| \leq \frac{1}{2} + M, x \in A$

$\Rightarrow f \in B(A, \mathbb{R})$

Κριτήριο ομοιότητας

$f_n \xrightarrow{\rho_0} f$ και $(f_n) \subseteq B(A, \mathbb{R})$ και $f \notin B(A, \mathbb{R}) \Rightarrow f_n \not\xrightarrow{\rho_0} f$

Ασκηση Έστω $f_n(x) = e^{\min\{n, x\}}, x \geq 0$. Να εξετάσει ως προς την ομοιότητα.

Λύση Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $x \geq 0$. i) $x < n \Rightarrow |f_n(x)| = |e^{\min\{n, x\}}| = e^x \leq e^n$

ii) $x > n \Rightarrow |f_n(x)| = e^n$ Άρα $\forall x \geq 0 |f_n(x)| \leq e^n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} f_n \in B([0, +\infty), \mathbb{R})$

$f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$ ώστε $f_n \xrightarrow{\rho_0} f$ όμως $f \notin B([0, +\infty), \mathbb{R})$ άρα $f_n \not\xrightarrow{\rho_0} f$.